Junio 2010 - Fase General

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- (a) (1 punto) Enuncie el teorema de Bolzano.

(b) (1 punto) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\mathrm{e}^x = -2x^2 + 2$ tiene soluciones. (Puede ser útil dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = -2x^2 + 2$.)

(c) (0'5 puntos) Determine un intervalo de longitud 1 donde se encuentre alguna solución de la ecuación $\mathrm{e}^x = -2x^2 + 2$.

2.- (a) (1 punto) Represente, de forma aproximada, la recta $x = 1$ y las curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{4}{x}$, y señale el recinto plano limitado por ellas.

(b) (1'5 punto) Calcule el área de dicho recinto.

3.- (a) (1'25 puntos) Discuta el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 2x & -\,y & +\,z & = & 1 \\ -\,x & +\,y & -\,z & = & 0 \\ & y & -\,z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

(b) (1'25 puntos) Resuelva el anterior sistema.

4.- Calcule el ángulo que forma el plano $\sqrt{3}\,x - z = 3$ con la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $y - x = -1$. (Los ángulos se miden en radianes.)

OPCIÓN B

1.- (a) (0'5 puntos) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

(b) (2 puntos) Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right), \qquad 0 < x < \pi\,.$$

2.- (a) (0'5 puntos) Diga cuándo una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$.

(b) (2 puntos) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ que cumpla $F(0) = 0$.

3.- Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}.$$

4.- De todos los planos que pasan por los puntos $P = (0,0,-1)$ y $Q = (1,0,0)$, calcule uno que sea paralelo a la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $x - z = 0$.

OPCIÓN A

1.- **(a)** : 1 punto. **(b)** (1 punto) : 0'5 puntos por un planteamiento correcto y 0'5 puntos por la resolución. **(c)** : 0'5 puntos.

2.- **(a)** (1 punto) : 0'25 puntos por la representación de la recta y de cada una de las curvas, y 0'25 puntos por la señalización del recinto pedido. **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por el planteamiento de la integral definida para calcular el área $\left(A = \int_1^2 (\frac{4}{x} - \frac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x\right)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área $\left(A = 4(\ln 2) - \frac{7}{6}\right)$.

3.- **(a)** (1'25 puntos) : 0'75 puntos por obtener que la matriz de coeficientes y la ampliada tienen rango 2, y 0'5 puntos por deducir que el sistema es compatible indeterminado. **(b)** : 1'25 puntos por obtener que la solución es la recta $x = 1$, $y - z = 1$ (en paramétricas: $x = 1$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$).

4.- (2'5 puntos) : 0'5 puntos por el vector normal del plano $u = (\sqrt{3}, 0, -1)$, 0'5 puntos por el vector director de la recta $v = (0, 0, 1)$, 0'75 puntos por plantear la fórmula $\left(\text{si } \beta \in [0, \pi/2] \text{ es tal que } \cos\beta = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|}\right.$, entonces el ángulo que forman la recta y el plano es $\left.\theta = \pi/2 - \beta\right)$; 0'75 puntos por el cálculo $\left(\cos\beta = 1/2 \;\Rightarrow\; \beta = \pi/3 \;\Rightarrow\; \theta = \pi/6\right)$.

OPCIÓN B

1.- **(a)** : 0'5 puntos por el enunciado correcto de la regla. **(b)** (2 puntos) : 0'5 puntos por la aplicación correcta de la regla de la cadena, 0'25 puntos por la derivada del logaritmo, 0'5 puntos por la derivada del cociente, 0'25 puntos por la derivada del coseno, y 0'5 puntos por la simplificación $\left(f'(x) = \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)$.

2.- **(a)** : 0'5 puntos por la definición correcta. **(b)** (2 puntos) : 1 punto por el cálculo de la integral indefinida $\left(F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C\right)$, y 1 punto por la determinación de la primitiva $\left(F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}\right)$.

3.- (2'5 puntos) : 1 punto por el cálculo del determinante y los valores que lo anulan $\left(|A| = -b^2 + b + 2 = -(b-2)(b+1)\right)$; 0'5 puntos por el cálculo del rango en cada uno de los tres casos (si $b \neq -1$ y $b \neq 2$ el rango es 3; si $b = -1$ ó si $b = 2$ el rango es 2).

4.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por un planteamiento correcto (la dirección del plano buscado debe contener al vector $\vec{v} = (1, -1, 1)$ que define la dirección de la recta y al vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1)$); 1 punto por el cálculo del plano ($x - z = 1$).

Junio 2010 - Fase Específica

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - x\cdot\cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x}.$$

2.- Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

3.- **(a)** (1 punto) Defina el concepto de rango de una matriz.
(b) (1 punto) Calcule el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (0'5 puntos) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz A anterior es combinación lineal de las otras dos columnas.

4.- Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto $P = (\lambda, 1, \mu)$ al plano determinado por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$ sea igual a 1.

OPCIÓN B

1.- **(a)** (1 punto) Defina la noción de mínimo relativo de una función.
(b) (1 punto) Para cada x sea $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcule los extremos relativos de $h(x)$.
(c) (0'5 puntos) ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto? Razone la respuesta.

2.- **(a)** (1'25 puntos) Represente, de forma aproximada, la curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $Q_0 = (-1, 4)$.
(b) (1'25 puntos) Señale el recinto plano limitado por el eje OY y por la curva y la recta del apartado anterior, y calcule al área de dicho recinto.

3.- Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrrcc} bx & +\,by & & = & 1 \\ 3x & & +\,bz & = & b-2 \\ & -\,y & +\,z & = & b-3 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

4.- Dados los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$, sea r la recta que pasa por A y B, y sea Π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Calcule el punto P_0 en el que se cortan r y Π.

OPCIÓN A

1.- (2'5 puntos): 1 punto por la aplicación correcta de la regla de l'Hopital cada vez que se utiliza (2 veces), y 0'5 puntos por obtener que el límite vale 1.

2.- (2'5 puntos): 1 punto por la aplicación correcta de la fórmula de integración por partes cada vez que se utiliza (2 veces), para llegar a la expresión de las primitivas $\big(F(x) = -\mathrm{e}^{-x}(2 + 2x + x^2) + C\big)$; 0'5 puntos por el caso particular $(F(0) = 0 \;\Rightarrow\; C = 2)$.

3.- **(a)**: 1 punto. **(b)** (1 punto): 0'5 puntos por cualquier planteamiento correcto y 0'5 puntos por el cálculo ($\mathrm{rg}A = 2$). **(c)** (0'5 puntos): 0'25 puntos por la respuesta negativa y 0'25 puntos por la justificación.

4.- (2'5 puntos): 1 punto por la obtención del plano del enunciado $(x+y-z=1)$, 0'75 puntos por cualquier planteamiento correcto para obtener la distancia, y 0'75 puntos por llegar a la relación $|\lambda - \mu| = \sqrt{3}$.

OPCIÓN B

1.- **(a)**: 1 punto. **(b)**: 1 punto (hay un único mínimo en $x = 0$). **(c)** (0'5 puntos): 0'25 por la respuesta afirmativa, y 0'25 puntos por razonarla correctamente.

2.- **(a)** (1'25 puntos): 0'5 puntos por la representación de la curva, 0'5 puntos por el cálculo de la recta tangente, y 0'25 puntos por la representación de la recta. **(b)** (1'25 puntos): 0'25 puntos por señalar el recinto, 0'5 puntos por el planteamiento correcto de la integral para calcular el área, y 0'5 puntos por la resolución de la integral y el cálculo del área.

3.- (2'5 puntos): 1 punto por el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes del sistema y de los valores del parámetro que lo anulan $\big(|A| = b\cdot(b-3)\big)$; 0'5 puntos por la discusión de cada uno de los tres casos (si $b \neq 0$ y $b \neq 3$, el sistema es compatible determinado; si $b = 0$ el sistema es incompatible y si $b = 3$ el sistema es compatible indeterminado).

4.- **(a)** (2 puntos): 1 punto por obtener la recta r ($x = 1$, $y = z$; en paramétricas $x = 1$, $y = \lambda$, $z = \lambda$); 1 punto por obtener el plano Π $(y+z=3)$; 0'5 puntos por obtener el punto $P_0 = \big(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\big)$.