Septiembre 2010 - Fase General

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0\,. \end{cases}$$

2.- Calcule el valor de la integral

$$\int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3} \mathrm{d}x\,.$$

3.- **(a)** (1 punto) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrcl} & y & -\,z & = & 1 \\ -\,x & & +\,4z & = & 0 \\ & 2y & -\,z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

(b) (1'5 puntos) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

4.- Fijados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, obtenga la relación que deben cumplir los números reales λ y μ para que el punto $P = (\lambda, \mu, 0)$ sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1.

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en los que su recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x - y = 0$.

2.- **(a)** (1 punto) Represente, aproximadamente, el recinto plano limitado por la parábola $y = 2x^2$ y la parábola $y = x^2 + 4$.

(b) (1'5 puntos) Calcule el área de dicho recinto.

3.- **(a)** (1 punto) Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición, C es la matriz inversa de B.

(b) (1'5 puntos) Diga razonadamente si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz A^{-1}.

4.- Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, \mu, 0)$, donde λ y μ son números reales.

(a) (1 punto) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla $\cos\theta = 0$.

(b) (1'5 puntos) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla $\operatorname{sen}\theta = 0$.

OPCIÓN A

1.- (2'5 puntos) : 1 punto por responder que para que f sea continua debe ser $c = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$; 1'5 puntos por calcular dicho límite (hay que aplicar l'Hopital dos veces) y concluir que debe ser $c = 1/2$.

2.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por el cálculo de la integral indefinida $\big(F(x) = \frac{3}{20}(x-1)^{\frac{5}{3}} + C\ \big)$, y 1 punto el cálculo de la integral definida $\big(F(2)-F(1) = \frac{3}{20}\big)$.

3.- (a) : 1 punto (la matriz de coeficientes del sistema A es cuadrada y con determinante no nulo). **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por obtener la inversa de la matriz A, y 0'5 puntos por llegar a que la solución es $(x, y, z) = (-4, 0, -1)$. [Pueden responderse simultáneamente los dos apartados por otros métodos.]

4.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por un planteamiento correcto, y 1 punto por obtener la relación $(|\lambda + \mu - 1| = 2)$.

OPCIÓN B

1.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por cualquier planteamiento correcto, y 1 punto por el cálculo de los puntos $\big($los puntos son $(-1, 0)$ y $\big(\frac{1}{3}, \frac{40}{27}\big)\big)$.

2.- (a) (1 punto) : 0'5 puntos por la representación de las parábolas, 0'5 puntos por el cálculo de los puntos en que se cortan $(x = \pm 2)$.**(a)** (1'5 puntos) : 1 punto por el planteamiento correcto de la integral definida para calcular el área $\big(A = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\, dx\big)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área $\big(A = \frac{32}{3}\big)$.

3.- (a) : 1 punto. **(b)** (1'5 puntos) : 0'5 puntos por obtener $|A| = -2 \neq 0$ y deducir que la inversa de A existe, y 1 punto por calcular A^{-1}. [Este apartado se puede responder globalmente por el método de Gauss.]

4.- (a) (1 punto) : 0'5 puntos por un planteamiento correcto y 0'5 puntos por obtener la relación pedida ($\cos\theta = 0$ si y sólo si $\lambda + \mu = 0$). **(b)** (1'5 puntos) : 0'75 puntos por un planteamiento correcto y 0'75 puntos por la relación pedida ($\operatorname{sen}\theta = 0$ si y sólo si $\lambda\mu = 1$).

Septiembre 2010 - Fase Específica

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Calcule la derivada de la función $F(x) = g(f(x))$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Simplifique en lo posible dicha derivada.

2.- (a) (1'5 puntos) Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la hipérbola $xy = 1$, su recta tangente en el punto $(1,1)$ y la recta $x = 2$.

(b) (1 punto) Calcule el área de dicha región plana.

3.- Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & & & = & a+1 \\ -2x & - & y & + & az & = & -2 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

4.- Considere las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = z \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right.$.

Obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a 1 y sea ortogonal al vector $(-1, 0, 1)$.

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- (a) (2 puntos) Estudie el dominio, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y de convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ (ln denota el logaritmo neperiano).
(b) (0'5 puntos) Represente la gráfica de $f(x) = \ln(1 + x^2)$ utilizando los datos obtenidos en el apartado (a).

2.- Calcule las primitivas de la función

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,, \qquad x > 0\,.$$

(Puede utilizarse el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$.)

3.- Determine el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.- (a) (2 puntos) Determine el plano Π que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta r de ecuaciones $x + y + z = 0$, $x - z = 1$.
(b) (0'5 puntos) Calcule el punto en el que se cortan r y Π.

OPCIÓN A

1.- (2'5 puntos) : 0'75 puntos por la derivada de $g(x)$, 0'25 puntos por la derivada de $f(x)$, 1 punto por la aplicación correcta de la regla de la cadena, y 0'5 puntos por la simplificación ($F'(x) = \operatorname{tg} x$).

2.- **(a)** (1'5 puntos) : 0'5 puntos por el cálculo de la recta tangente ($x+y = 2$) y 1 punto por la representación de la figura pedida. **(b)** (1 punto) : 0'5 puntos por el planteamiento de la integral para calcular el área $\left(A = \int_1^2 (\frac{1}{x} + x - 2)\, \mathrm{d}x\right)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área ($A = \ln 2 - 1/2$).

3.- (2'5 puntos) ; 1 punto por el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes y de los valores del parámetro que lo anulan ($|A| = a^2 - 1$), y 0'5 puntos por la discusión de cada uno de los tres casos (si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ es compatible indeterminado, y si $a = -1$ es incompatible.)

4.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por un planteamiento correcto y 1 punto por la solución correcta ($P = (1,1,1)$ y $Q = (1,0,1)$).

OPCIÓN B

1.- **(a)** (2 puntos) : su dominio es toda la recta real (0'25 puntos), tiene un único mínimo en $x = 0$ (0'75 puntos), tiene dos puntos de inflexión, en $x = -1$ y en $x = 1$ (0'75 puntos), y es convexa en $(-\infty, -1) \cap (1, \infty)$ y cóncava en $(-1, 1)$. **(b)** : 0'5 puntos.

2.- (2'5 punto) : 0'75 puntos por hacer bien el cambio de variable, 1'25 puntos por resolver la nueva integral, y 0'5 puntos por deshacer el cambio para obtener las primitivas $\left(F(x) = \frac{1}{2}\big[\ln(\mathrm{e}^x - 1) - \ln(\mathrm{e}^x + 1)\big] + C\right)$.

3.- (2'5 puntos) : 1 punto por el cálculo del determinante y los valores que lo anulan $\big(|A| = a(2a+1)\big)$, y 0'5 puntos por el cálculo del rango en cada uno de los tres casos (si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{-1}{2}$ el rango es 3; si $a = 0$ ó $a = \frac{-1}{2}$ el rango es 2).

4.- **(a)** (2 puntos) : 1 punto por cualquier planteamiento correcto para obtener el plano, y 1 punto por el cálculo del plano ($\Pi : x - 2y + z = 2$). **(b)** : 0'5 puntos (el punto pedido es $\left(P = \left(\frac{5}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{-1}{6}\right)\right)$.