INTRODUCCIÓN

En la última reunión de la Comisión Permanente de Matemáticas II se presentó un posible desarrollo de la parte de Geometría Analítica del Espacio correspondiente al programa de la asignatura. La idea era completar las sesiones que ya se hicieron en cursos pasados de las partes correspondientes a Cálculo Diferencial e Integral.
La exposición la hizo el coordinador de la materia por el sector no universitario. Más que una programación detallada, es una reflexión después de mis muchos años de experiencia impartiendo esta materia y los que le antecedieron cuando existía el antiguo COU.

- La principal idea que quiero transmitir es que el alumno visualice el espacio, que sea capaz de conseguir una visión espacial que le permita ver aquello que está estudiando. Es bastante frecuente utilizar mucho el álgebra y menos la visión geométrica, yo propongo alternar los dos aspectos, anteponiendo el visual al algebraico.

- He desarrollado el programa y he ido proponiendo ejemplos que permitan ir manejando las principales herramientas de la geometría del espacio: puntos, vectores, rectas y planos, destacando que esta forma de abordar la geometría se sustenta en la existencia de un sistema de referencia cartesiano respecto al cual se va elaborando todo el trabajo.

- Creo que no es necesario distinguir entre la idea de espacio afín y euclídeo, por cuestiones prácticas. Si desde el principio definimos los tres productos con vectores: escalar, vectorial y mixto, hemos abierto una puerta a la posibilidad de simultanear las propiedades afines (sin distancias ni ángulos) con las euclídeas, en las que se resuelven los problemas relacionados con estas medidas.

- En el tema de vectores, algunos de los ejemplos han sido propuestos en pruebas de selectividad hace años. Aunque pueda pensarse que son difíciles como para que sirvan de modelo en los exámenes, la idea es analizar unos tipos de problemas menos frecuentes, pues los más habituales son los que aparecen en los libros de texto con más asiduidad.

- En el estudio de las posiciones relativas de rectas, planos, etc, recurro a la visión geométrica; por ejemplo, es fácil que un alumno sepa que dos rectas sólo admiten cuatro posiciones: coincidentes, paralelas, secantes o que se crucen. Después se pasará al análisis algebraico a partir de los vectores directores y sus ecuaciones.

- Otra recomendación es estudiar inicialmente las ecuaciones de rectas en forma paramétrica y continua, y no dar la conocida como forma implícita hasta que no se estudie la ecuación del plano. Cuando se analizan las posiciones de dos planos, es el momento de decir que si dos planos se cortan, definen una recta pues el sistema formado por sus ecuaciones es compatible e indeterminado y sus infinitas soluciones son los puntos de la recta. Es muy importante que el alumno sepa obtener el vector director de una recta cuando viene dada como intersección de planos.

- Conviene resaltar la importancia del vector director en la recta y del normal en el plano en los problemas en los que estos intervengan.

- Las distancias en el espacio se pueden reducir a dos casos: distancia de punto a recta y distancia de punto a plano. Se pueden calcular estas distancias sin utilizar la correspondiente fórmula y después deducirlas.

- Los problemas angulares se resuelven a partir del producto escalar, no es necesaria ninguna fórmula, sólo que sepan qué vectores definen el ángulo en cada caso.

- Las posiciones de tres planos en el espacio es difícil de entender si previamente no reflexionan y tratan de verlas, ¿de cuántas formas diferentes se pueden colocar tres folios en el espacio? Con alguna ayuda nuestra para iniciarlos, llegan fácilmente a las ocho posibles posiciones y además, si comparan las ecuaciones de los planos dos a dos y el tipo de sistema, llegan a identificarlas sin mucho esfuerzo.

- En la parte final hay algunos problemas, también propuestos en selectividad, que me parecen interesantes porque los datos no vienen dados en coordenadas. Creo que el alumno debe saber que si un problema de geometría del espacio lo quiere intentar resolver de forma analítica, previamente debe definir un sistema de referencia cartesiano, para que los puntos y los vectores tengan sus coordenadas, y las rectas y los planos sus ecuaciones.

Espero que estas reflexiones sean útiles. En sucesivas reuniones de coordinación podemos debatir todo lo que queráis respecto a ellas y al programa en general.

Antonio Molano Romero.
IES “Profesor Hernández Pacheco”
Cáceres. amolanor@gmail.com

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

- Sistema de coordenadas cartesianas en R^3.
- Vectores fijos y vectores libres en R^3
- Definición y cálculo del módulo de un vector.
- Distancia entre dos puntos.

Problema.- Encuentra un vector $\vec{x}$ contenido en el plano OYZ, cuyo módulo sea 2 y que forme un ángulo de 30º con el eje OY positivo.

Problema.- Encuentra un vector $\vec{x}$ contenido en el plano OXZ, cuyo módulo sea 4 y que forme un ángulo de 45º con el eje OZ positivo.

- Suma de vectores. Propiedades.
- Representación gráfica de los vectores suma y diferencia.

Problema.- Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores ortogonales cuyos módulos son 4 y 3 respectivamente. Hallar los módulos de $\vec{v}+\vec{w}$ y de $\vec{v}-\vec{w}$.

Problema.- ¿Qué ángulo deben formar los vectores $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo y además éste coincida con el módulo de su diferencia? ¿Y para que coincida con el módulo de su suma?

- Producto de número real por vector. Propiedades.
- Coordenadas del punto medio de un segmento. Alineación de puntos.
- Combinación lineal de vectores. Dependencia lineal y base en R^3
- Tres vectores de R^3 linealmente dependientes son coplanarios.

Problema.- a) Calcular los valores del parámetro t para que los vectores (t,2,1-t); (2+t,1,-t) y (t,3,1-t) sean linealmente dependientes y, en tal caso, hallar una relación de dependencia.

b) ¿Para qué valores de t están alineados los puntos (t,2,1-t); (2+t,1,-t) y (t,3,1-t)?

- Definición de producto escalar. Propiedades.
- Expresión del producto escalar en la base canónica de R^3.
- Cálculo del ángulo que forman dos vectores. Vectores ortogonales.
-

Problema.- Encuentra un vector $\vec{x}$ coplanario (contenido en el mismo plano) con $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (1,1,1)$, ortogonal a $\vec{u}$ y unitario.

Problema.- Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores cuyos módulos son 2 y 3 respectivamente y forman un ángulo de 60º. Hallar los módulos de $\vec{v} + \vec{w}$ y de $\vec{v} - \vec{w}$

Problema.- Sea $\vec{e}$ un vector unitario del espacio. ¿Cuántos vectores $\vec{v}$ hay en el espacio de módulo 2, tales que $\vec{e} \cdot \vec{v} = -1$? ¿Y tales que $\vec{e} \cdot \vec{v} = 2$? ¿Y tales que $\vec{e} \cdot \vec{v} = -3$?

Problema.- Sean $\vec{e}$ y $\vec{v}$, dos vectores de módulos 1 y 2 respectivamente, que forman un ángulo de 60º. Hallar todas las combinaciones lineales de $\vec{e}$ y $\vec{v}$ que sean ortogonales a $\vec{e}$ y que tengan módulo 3.

Problema.- Probar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Problema.- Proponer un ejemplo de un vector que forme un ángulo de 60º con el vector (3,1,-1) en un sistema de coordenadas rectangulares.

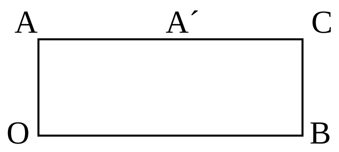
Problema.- Proponer un ejemplo de un vector que sea ortogonal al vector (1,-2,1) y tenga módulo doble que él.

Problema.- Encontrar un punto P tal que el vector OP forme un ángulo de 30º con el eje Y.

Si los lados de un rectángulo miden 2 cm y 6 cm, calcular:

a) La distancia de un vértice O a la recta que pasa por los puntos medios A´y B´de los lados que no pasan por O.

b) El coseno del ángulo que forma la diagonal AB con OA´. Siendo A´ el punto medio del lado AC.



- Definición de producto vectorial. Propiedades. Áreas de paralelogramos y de triángulos.

<u>Problema</u>.- Calcula los posibles valores de a, b y c para que el producto vectorial de los vectores (a,b,0) y (c,o,1) sea un vector unitario en la dirección del eje OX.

<u>Problema</u>.- Dados los vectores $\vec{u} = (-1,1,1)$ y $\vec{v} = (-2,1,-1)$, hallar el coseno del ángulo que forman y comprueba que: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

<u>Problema</u>.- ¿Qué relación existe entre los módulos de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el módulo de su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$?
Si $|\vec{u}| = 2$ y $|\vec{v}| = 3$ y su producto escalar es: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, calcula el módulo de su producto vectorial, es decir $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

<u>Problema</u>.- ¿Qué ángulo deben formar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 2 para que su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ también tenga módulo 2?

<u>Problema</u>.- Si dos vectores **e** y **v** forman ángulo recto y sus módulos respectivos son 2 y 3. Calcular el módulo del producto vectorial (**e+v**)x(**e-v**).

<u>Problema</u>.- Los puntos A(1,-1,1); B(2,0,3); C(2,-1,4) y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Calcula las coordenadas del vértice D y halla el área del paralelogramo.

<u>Problema</u>.- Determinar el valor del parámetro a para que sea mínima el área del triángulo formado por los puntos (0,a,0); (a-1,-1,-1) y (1,a,2).

<u>Problema</u>.- Probar que los puntos A(1,1,1); B(1,-1,3); C(0,2,1) y D(2,-1,2) son coplanarios (contenidos en un mismo plano) y halla el área del cuadrilátero ABCD.

- Definición de producto mixto. Propiedades. Volúmenes de paralelepípedos y tetraedros.

<u>Problema</u>.- Sean ABCD los cuatro vértices de una cara de un paralelepípedo y A´B´C´D´ los vértices de la cara opuesta. Se sabe que A(2,0,0); B(2,3,0); C(0,3,0); A´(4,1,5). Hallar las coordenadas de los vértices que faltan y el volumen del paralelepípedo.

<u>Problema</u>.- Sean A(0,0,0); B(a,0,0); C(2,1,-2) y D(0,b,4) los vértices de un tetraedro ABCD. Halla “a” y “b” (a>0) y, el volumen del tetraedro, sabiendo que la cara ABC es un triángulo isósceles de lados iguales AB y AC y, la cara ACD es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.

- Determinación de una recta. Ecuaciones paramétricas y continua de una recta.
- Posiciones de dos rectas en el espacio (A través de los vectores)
- Paralela y perpendicular a una recta pasando por un punto (cortándola y sin cortarla)

Problema.- Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = y = z - 1$. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a "r" sin cortarla y de otra perpendicular a "r" cortándola.

Problema.- Sea A(1,1,1) y la recta "r": $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda, -\lambda)$

a) Hallar la proyección de A sobre r.
b) Ecuación de la recta que pasa por A corta perpendicularmente a r.
c) Distancia de A a r.
d) Simétrico de A respecto a r.

- Deducción de la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta.

Problema.- Dada la recta x=y-1=z+2, hallar un punto del espacio que diste dos unidades de esta recta.

- Cálculo de la distancia entre dos rectas paralelas.
- Perpendicular común a dos rectas.

Problema.- Probar que las rectas de ecuaciones: $r: x = y = z$ y $s: \left.\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = -t \end{array}\right\}$ se cruzan. Escribe la ecuación de la recta que las corta perpendicularmente (perpendicular común) y calcula la distancia entre ellas.

- Deducción de la fórmula para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Determinación de un plano. Ecuaciones paramétricas y general de un plano.

Problema.- Probar que los puntos A(0,2,3); B(-1,0,1) y C(1,0,0), probar que no están alineados y escribir la ecuación del plano que las contiene.

Problema.- Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$ y $s: \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$ probar que se cortan y escribir la ecuación del plano que las contiene.

Problema.- Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$ y $\mathrm{s}: \begin{cases} \mathrm{x} = -\lambda \\ \mathrm{y} = 2\lambda \\ \mathrm{z} = 0 \end{cases}$ probar que son paralelas y escribir la ecuación del plano que las contiene.

Problema.- Sea A(2,1,0) y la recta $r: \mathrm{x} = \mathrm{y} + 1 = \mathrm{z} - 3$, escribir la ecuación del plano que los contiene.

- Vector normal de un plano.
- Ecuaciones de los ejes de coordenadas y de los planos coordenados.

Problema.- El plano x+y+z=1 corta a los ejes de coordenadas en tres puntos.

a) Hallar el área del triángulo ABC.
b) A,B,C y O son los vértices de un tetraedro, hallar su volumen.

- Perpendicularidad de recta y plano (A través de los vectores)
- Definición y cálculo del simétrico de un punto respecto a un plano.

Problema.- Dado el plano x-y+z=3, hallar la proyección del punto P(1,1,1) sobre este plano, la distancia entre ellos y el simétrico de P respecto al plano.

- Distancia de punto a plano (deducción de la fórmula)
- Posiciones de dos planos en el espacio. (A través de los vectores). Poner un ejemplo de cada una de ellas.
- Ecuación de la recta definida por dos planos secantes. Obtención de un vector director de la recta.

Problema.- Dada la recta $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\}$ Expresarla en forma paramétrica y continua.

- Posiciones de tres planos en el espacio. Poner un ejemplo de cada una de ellas.

Hay OCHO posiciones distintas, geométricamente es muy fácil deducirlas:

Los tres coincidentes (SCI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{array}\right\}$

Dos coincidentes y uno paralelo a ellos (SI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=0 \end{array}\right\}$

Dos coincidentes y el tercero que los corte (SCI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

Los tres paralelos (SI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+3y+3z=5 \end{array}\right\}$

Dos paralelos y el tercero que los corte (SI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ x-y-3z=1 \end{array}\right\}$

Los tres planos se cortan en una recta (SCI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=3 \end{array}\right\}$

Se cortan dos a dos (SI): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=0 \end{array}\right\}$

Secantes en un punto (SCD): $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\}$

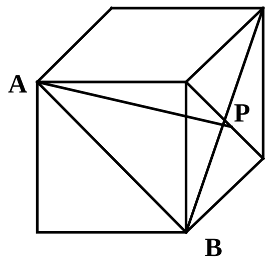
Problema.-Estudiar según los valores de λ la posición relativa de los planos:
$\pi_1 \equiv \lambda x-2y+z-1=0;\ \pi_2 \equiv x-2\lambda y+\lambda z-13=0;\ \pi_3 \equiv x-4y+\lambda z-\lambda=0$

- Posiciones de recta y plano en el espacio. (A través de los vectores).
- Distancia de recta a plano.
- Distancia entre dos planos.

Problema.- Dos caras de un cubo están contenidas en los planos x+y+z=0; 2x+2y+2x=1. Hallar la arista del cubo.

- Ángulo formado por dos rectas.

Problema.- Calcula el ángulo que forma la recta PA con la recta PB, siendo "a" la arista del cubo.



- Ángulo formado por recta y plano.

- Ángulo formado por dos planos.

<u>Problema</u>.- La base de una pirámide es un cuadrado ABCD de 2 metros de lado y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.